CRITERI PER LA VALUTAZIONE DI UN METODO NUMERICO

1) accuratezza dell'approssimazione fornita
2) facilità di implementazione su calcolatore
3) costo computazionale

ERRORI

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

1) errore assoluto Δx

$x \in \mathbb{R}$ • soluzione esatta

$\bar{x} \in \mathbb{R}$ • soluzione approssimata

$$\Delta x = \bar{x} - x$$

es. se $\Delta x = 10^{-3}$ è grande o piccolo?

DIPENDE DA x.

se $x = 10^{8}$ Δx è piccolo

se $x = 10^{-8}$ Δx è grandissimo

2) errore relativo ε_x (non è sempre possibile stimarlo)

$x \in \mathbb{R}$ = soluzione esatta $(x \neq 0)$

$\bar{x} \in \mathbb{R}$ = soluzione approssimata

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\bar{x} - x}{x} \qquad \bar{x} = x(1 + \varepsilon_x)$$

se $x = 10^{8}$ e $\Delta x = 10^{-3}$ $\quad \varepsilon_x = \frac{10^{-3}}{10^{8}} = 10^{-11} \ll 1$

se $x = 10^{-8}$ e $\Delta x = 10^{-3}$ $\quad \varepsilon_x = \frac{10^{-3}}{10^{-8}} = 10^{5} \gg 1$

$\varepsilon_x = 2\% = 0{,}02$, $\varepsilon_x = 0{,}9 = 90\%$

"L'errore assoluto dà un'informazione relativa, l'errore relativo dà un'informazione assoluta"

TIPOLOGIE DI ERRORE

1) Discretizzazione o troncamento

Se il dominio del problema è continuo bisogna che lo discretizzi in un dominio di elementi finiti, altrimenti il calcolatore non lo sa elaborare.

PER ESEMPIO UTILIZZANDO TAYLOR E TRONCANDO LO SVILUPPO.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f \in C^2(\mathbb{R}) \quad x \in \mathbb{R}$

fissato $h > 0$ piccolo

$$f'(x) \approx \varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(\xi) h^2$$

con $\xi \in (x, x+h)$

$$\approx f(x) + f'(x)h$$

↳ ERRORE DI TRONCAMENTO

$$\varphi_h(x) - f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} f''(\xi) h}$$

errore assoluto di troncamento

È legato alla definizione del metodo numerico

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

2) Ordine di convergenza

$\{x_i\}$ = successione di risultati intermedi che portano alla soluzione tramite un metodo iterativo.

$i = 0, 1, 2, \ldots$

Se $\lim_{i \to \infty} x_i = x^*$ → soluzione esatta

ovviamente le iterazioni non possono essere infinite, si determina quindi un CRITERIO DI ARRESTO OPPORTUNO

$i = N - 1$ e $x_N \sim x^*$

$x_N - x^* = \Delta x$

ESEMPIO

$x_0 = 2$

$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{2}{x_i}\right)$ $\quad i = 0, 1, 2, \ldots$

$\lim_{i \to \infty} x_i = \sqrt{2}$

$\Delta x_{(4)} = x_4 - \sqrt{2} \sim 10^{-12}$ molto piccolo

E' legato al ~~metodo~~ modo di utilizzo del metodo

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

3) Errore di Round Off.

3.1) errore di rappresentazione → memoria finita

3.2) errori introdotti durante il calcolo (propagazione dell'errore) (NON SI FA)

- Rappresentazione dei numeri interi
- Sistema di numerazione posizionale in base $b = 10$ $\{0, 1, \dots a\}$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_N$ $\quad \alpha_i = \{0, 1, \dots b-1\}$

$i = 0, 1, \dots N$

$$n = \alpha_1 b^{N-1} + \alpha_2 b^{N-2} + \dots + \alpha_N b^0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i}$$

ESEMPIO $n = 818$

$N = 3$

$\alpha_1 = 8, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 8$

$$818 = 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

SE HO N CIFRE

$$n \in \{0, 1, \dots b^N - 1\}$$

$N = 3 \quad b = 10 \quad \Rightarrow n \leq 10^3 - 1 = 999$

$b \in \mathbb{N} \quad b > 1$

$\{0, 1, \dots b-1\}$

sono b simboli

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Rappresentazione tipo complemento a due (i calcolatori non usano questo sistema)

$(n \in \mathbb{Z})$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_N$ $\quad \alpha_0 \in \{+, -\}$

$\alpha_i \ (i>0) \in \{0, 1, \dots b-1\}$

$n = \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i} \right)$

→ non viene usato perché così si rappresentano ± 0, che non esistono.

Al suo posto uso:

$$n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i} & \in \{0, 1, \dots b^N - 1\} \text{ se } \alpha_0 = + \\ \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i} \right) - b^N & \text{se } \alpha_0 = - \end{cases}$$

$\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i} \right) < 0$ $\quad \in \{-b^N, 1-b^N, \dots -1\}$

$n \in \{-b^N, 1-b^N, \dots -1, 0, 1, \dots b^N-2, b^N-1\} \in \mathbb{Z}$

sono $2b^N$ elementi

- Rappresentazione con "shift"

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_N$ $\quad b \geq 2 \ (b \in \mathbb{N})$

N cifre $\quad \nu \in \mathbb{N}$

$\alpha_i \in \{0, 1, \dots b-1\}$ $\quad i = 1, 2, \dots N$

$n = \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i b^{N-i} \right) - \nu$ $\quad n \in \{-\nu, 1-\nu, \dots, b^N - 1 - \nu\}$

Devo stare attenta a non usare da questo range, perché se sbaglio potrei non accorgermene

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745